NEGOCIOS | UCAB

ÁREA DE APOYO ACADÉMICO

MATERIALES DE INSTRUCCIÓN SUPLEMENTARIA

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

MATEMÁTICA I

Caracas,2021

Tabla de Contenido

Introducción

Cuando se grafican funciones sobre un plano cartesiano, y para el presente tema se usan las funciones a trozos, usualmente pueden trazarse de tal forma que sea una línea continua (aun cuando la gráfica se encuentre compuesta por distintas funciones) se le conoce como **continuidad**. Sin embargo, puede ocurrir que se presenten saltos entre una función y otra, a ello se le llama **discontinuidad**.

Definición

Visualmente, se dice que una **función es continua** cuando puede trazarse sin necesidad de levantar el lápiz, es decir, la gráfica de la función **no presenta interrupciones (saltos)**.

Por otra parte, en la analítica, existen **reglas** para identificar cuándo una función es **continua** en un **determinado punto**.

Una función es continua en $x = a$ cuando suceden las tres condiciones siguientes:

1. Existe la función en el punto $\boldsymbol{x = a}$, es decir, $\boldsymbol{f(a)}\exists$.
Existe $\boldsymbol{f(x)}$.

Propiedades de los límites laterales

2. Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$; entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, es decir, el límite sí existe

3. $\boldsymbol{f(a) = L}$. La función y el límite en el punto $\boldsymbol{x = a}$ coinciden.

Importante

En las **funciones racionales** se presentan **asíntotas** y no es posible graficarlas de manera continua, por ello, y de forma anticipada puede saberse que la función **no es continua en esos puntos**.

Ejemplo

1. Ejemplo con una función racional

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}}$$

Hallar los puntos en la que la función no es continua.

$$\boldsymbol{x^2 - 4 = 0}$$

$$\boldsymbol{(x + 2)(x - 2) = 0}$$

$\boldsymbol{x = 2}$	$\boldsymbol{x = -2}$

Asíntota horizontal en $\boldsymbol{y = 0}$
Asíntotas verticales en $\boldsymbol{x = 2}$; $\boldsymbol{x = -2}$

Al no existir un valor de $\boldsymbol{f(x)}$ para $\boldsymbol{x = 2;\ x = -2}$ la función no es continua en esos puntos. A esto se le conoce como **discontinuidad**.

Discontinuidad

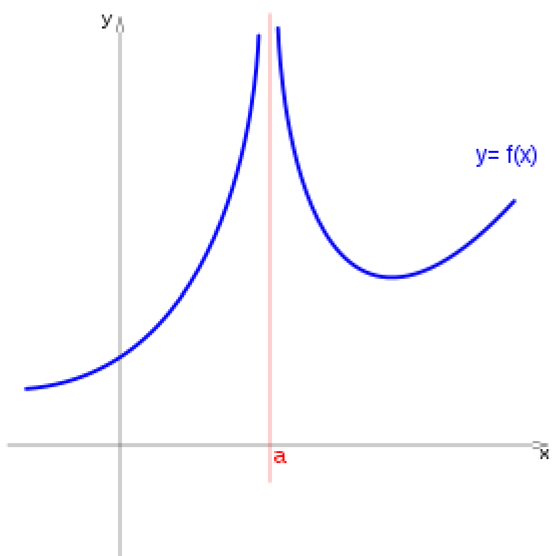
Se presenta cuando es posible graficar la función completa a excepción de un punto, es decir; se cumple la existencia del límite de la función cuando "x" tiende a ese punto, sin embargo no existe un valor de "y" para ese vector de "y".

Clasificación

1 Discontinuidad Evitable o Eliminable

Discontinuidad asintótica

Se presenta cuando la primera condición no se cumple, es decir; no existe valor de $f(x)$ para ese vector de "x" y **no existe el límite**, dado que el límite por la izquierda y el límite por la derecha ambos **tienden a infinito**, de manera que existe una **asíntota** en ese punto.



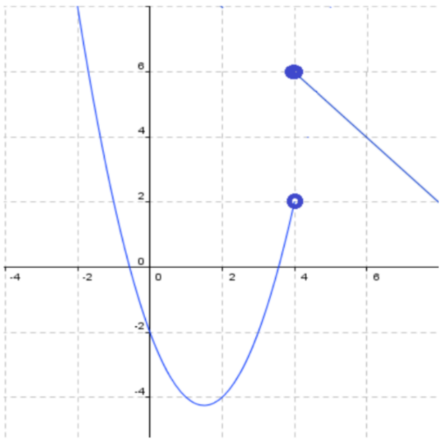
Representación

Gráfica

2 Discontinuidad Inevitable o Esencial

Discontinuidad salto finito

Cuando existe un valor de $f(x)$ para cualquier vector de "x" y no existe el límite de la función en algún punto (el límite por la izquierda es distinto al límite por la derecha) y **ambos límites** son **finitos**.

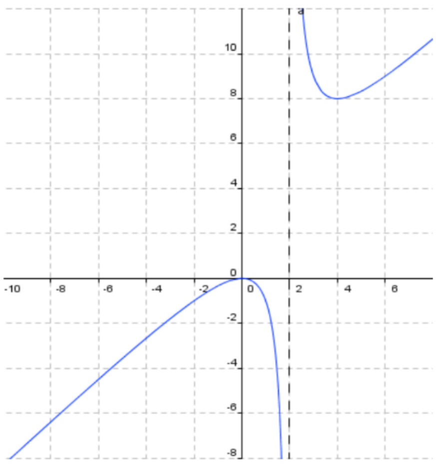


Representación

Gráfica

Discontinuidad salto infinito

Cuando existe un valor de $f(x)$ para cualquier vector de "x" y no existe el límite de la función en algún punto (el límite por la izquierda es distinto al límite por la derecha) pero uno de los dos **límites** (izquierda o derecha) es **infinito** mientras que el otro límite es **finito**.



Representación

Gráfica

Ejercicios Propuestos

Analice la continuidad de las funciones siguientes en los puntos indicados y bosqueje sus gráficas.

1. $f(x) = x^2 + 4x + 7, \quad x = 1 \neq 2$

2. $G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{para } x \neq 2 \\ 4 & \text{para } x = 2 \end{cases} \qquad x = 2$

3. $f(x) = \begin{cases} 5x + 7 & \text{para } x > 2 \\ 2x + 3 & \text{para } x \leq 2 \end{cases} \qquad x = 2$

4. $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{para } x < 1 \\ 10 - 2x & \text{para } x > 1 \end{cases} \qquad x = 1$

Estudie la continuidad de las siguientes funciones. En caso de existir discontinuidad indique qué tipo es:

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{para } x \neq 3 \\ 3 & \text{para } x = 3 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ -1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$

Cierre

La identificación de la continuidad o discontinuidad cuando se está frente a un estudio de funciones con respecto a un problema que se encuentre evaluando, permite entender, con un mayor detalle, el comportamiento característico del mismo, para así lograr obtener conclusiones y pueda seguidamente analizarse.

Referencias

Arya, J. y Lardner, R. (2009). Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía. Quinta Edición. México: Editorial Pearson Educación.

Fajardo, J. y Suárez, S. (s/f). Guía Sobre Límites. Guías de Apoyo. Matemática I. Caracas, Venezuela: UCAB.

Esto es un aporte de:

NEGOCIOS | UCAB

En el marco del Programa de Apoyo Personal Académico.

Profesor Asesor:
Jenifer Campos

Estudiante IS:
Nardy Zambrano

Edición y Montaje:
José Ucha
Sofía Sandoval

MATEMÁTICA I

Caracas,2021